Intransitive Würfel nach Bradley Efron in der Grundschule

Ina Rausch, Alsfeld & Bernd Neubert, Giessen

Zusammenfassung: *Im Beitrag wird eine Studie zu den intransitiven Würfeln nach Bradley Efron vorgestellt. Die Aufgaben innerhalb der Untersuchung wurden Lernenden der Jahrgangsstufen 2, 3 und 4 vorgelegt. Die Kompetenzen der Lernenden werden anhand einiger Lösungsbeispiele herausgearbeitet und dargestellt. Dabei wird sowohl auf den Aufbau der Studie, die Durchführung als auch auf ausgewählte Untersuchungsergebnisse eingegangen.*

1 Einleitung

Die Sensibilisierung der Unterscheidung zwischen zufälligen Ereignissen und gesetzmäßigen Erscheinungen ist in einem unterrichtlichen Geschehen elementar (vgl. Neubert 2016, S. 78). Besonders bei Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit kommt dem eigenständigen Handeln der Lernenden eine hohe Bedeutsamkeit zu (vgl. Hasemann, Mirwald & Hoffmann 2012, S. 153). Durch eigenständig durchgeführtes empirisches Handeln „reift die Erkenntnis, dass viele Versuche notwendig sind, um Gewissheit über das Eintreten zufälliger Ereignisse zu gewinnen“ (ebd., S. 153). Diese Vorgehensweise begünstigt das Gefühl des Erlebens und Verstehens der Lernenden, je intensiver die Thematik den alltäglich erlebten Mathematikunterricht durchdringt (vgl. ebd., S. 153). Damit dieses Bestreben gelingt, sind Aufgabenstellungen erforderlich, die „den Grad der Sicherheit des Eintretens eines zufälligen Ereignisses thematisieren“ (ebd., S. 153). In besonderer Weise bietet sich hierzu die Auseinandersetzung mit motivierenden realen stochastischen Vorgängen an. Der Lernprozess wird dabei auf enaktiver Stufe „durch isomorphe Spielhandlungen mit konkretem Material initiiert“ (Lindenau & Schindler 1977, S. 56).

Im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit wurde untersucht, wie Lernende der zweiten bis vierten Jahrgangsstufe mit der Thematik Wahrscheinlichkeit umgehen. Dazu wurden zwei der vier intransitiven Würfel nach Bradley Efron als Zufallsgeneratoren verwendet. Der Einsatz dieser modifizierten Würfel ist in Lehrplänen für die Primarstufe nicht vorgesehen. Uns sind auch keine diesbezüglichen Veröffentlichungen bekannt. In der Literatur findet man Anregungen für die Nutzung ab Jahrgangsstufe 7 (vgl. Pundsack & Schlie 2014, S. 18). Die Intention der Studie lag darin, dass die Lernenden mit Hilfe der modifizierten Würfel eine andere Betrachtungsweise auf die Thematik der Wahrscheinlichkeit erhalten und Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum idealen Würfel eigenständig erkennen und eventuelle Fehlvorstellungen korrigieren.

Es sollte außerdem untersucht werden, ob Lernende bereits im Grundschulalter komplexere Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsverständnis lösen können, wenn man sich als Lehrender darauf einlässt und den Lernenden den nötigen Spielraum dazu gewährleistet.

Daraus entstanden folgende Forschungsfragen:

- Inwieweit erkennen die Lernenden unterschiedliche Gewinnwahrscheinlichkeiten von zwei Zufallsgeneratoren?
- Inwieweit können die Lernenden unterschiedliche Gewinnwahrscheinlichkeiten von zwei Zufallsgeneratoren begründen?
- Inwieweit verändern sich die Kompetenzen der Lernenden bei der Begründung von Gewinnchancen durch eigenes Handeln auf empirisch-statistischem Weg?

2 Die intransitiven Würfel nach Efron

Für die Datenerhebung wurden zwei der insgesamt vier intransitiven Würfel nach Bradley Efron als Zufallsgeneratoren ausgewählt. Die Würfel gleichen dem idealen Spielwürfel im Sinne der geometrischen Beschaffenheit (vgl. Helmerich & Lengnink 2016, S. 87). Die Beschriftung der Augenzahlen weicht aber von der für einen Spielwürfel üblichen ab.

Der erste, für die Untersuchung verwendete, Würfel ist auf allen Seiten mit der Augenzahl Drei beschriftet und rot gefärbt (vgl. Pundsack & Schlie 2014, S. 18, S. 20). Abbildung 1 zeigt das zugehörige Würfelnetz.

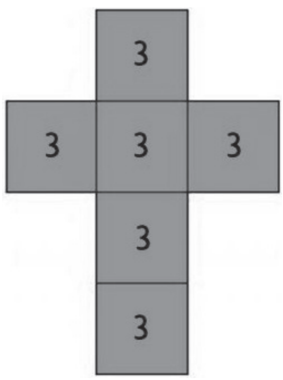

Abb. 1: Würfelnetz rot

Stochastik in der Schule 41 (2021) 2, S. 8–14

An Stelle der Augenzahlen wurden zur Veranschaulichung Ziffern gewählt. Das Würfeln einer Drei mit diesem Würfel ist somit ein sicheres Ereignis.

Der zweite Würfel, der für die Datenerhebung verwendet wurde, ist auf zwei Seiten mit der Augenzahl Sechs, auf vier Seiten mit der Augenzahl Zwei beschriftet und gelb gefärbt (vgl. ebd., S. 20). Abbildung 2 zeigt das Würfelnetz, welches ebenfalls zur Veranschaulichung mit Ziffern beschriftet wurde. Die Beschriftung dieses Würfels weist also zwei Besonderheiten gegenüber der des „üblichen" Spielwürfels auf. Nur zwei der üblichen Augenzahlen kommen vor und dies mit unterschiedlicher Häufigkeit.

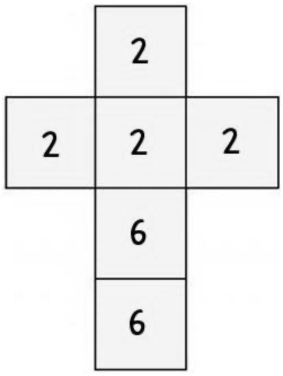

Abb. 2: Würfelnetz gelb

Die Wahl fiel auf diese beiden Würfel, da das Auftreten nur einer Augenzahl beim roten Würfel und die unterschiedliche Eintrittswahrscheinlichkeit der beiden möglichen Augenzahlen beim gelben Würfel in zwei Kriterien vom idealen Spielwürfel abweicht.

Die für die Untersuchung zentrale Frage, mit welchem Würfel die Gewinnwahrscheinlichkeit größer ist, wenn mit beiden Würfeln gleichzeitig gewürfelt wird und die höhere Augenzahl gewinnt, lässt sich unter anderem durch Anwendung der Laplace-Formel beantworten.

Die für „Rot gewinnt" günstigen Ereignisse entsprechen vier von sechs Fällen. Nach der Laplace-Formel gilt:

$$P(E_{Rot\ gewinnt}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Die für „Gelb gewinnt" günstigen Ereignisse entsprechen zwei von sechs Fällen. Demnach gilt:

$$P(E_{Gelb\ gewinnt}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Eine weitere Möglichkeit zur Darstellung der Lösung besteht in der systematischen Auflistung aller Möglichkeiten in einer Tabelle:

	2	2	2	2	6	6
3	r	r	r	r	g	g
3	r	r	r	r	g	g
3	r	r	r	r	g	g
3	r	r	r	r	g	g
3	r	r	r	r	g	g
3	r	r	r	r	g	g

Abb. 3: Die Abkürzungen r für rot und g für gelb, geben jeweils an, welcher der beiden Würfel bei den einzelnen 36 Konstellationen gewinnt.

Durch Auszählen der für die beiden Würfel günstigen Möglichkeiten erhält man 24-mal „Rot" und 12-mal „Gelb" bei insgesamt 36 Möglichkeiten. Dies entspricht den über die LAPLACE-Formel errechneten Wahrscheinlichkeiten.

Die Eintrittswahrscheinlichkeit für das Ereignis „Rot gewinnt" beträgt demnach $\frac{2}{3}$, für das Ereignis „Gelb gewinnt" $\frac{1}{3}$.

Außerdem wären auch die Auflistung aller Möglichkeiten mit entsprechenden Würfelbildern sowie ein Baumdiagramm (vgl. dazu auch die Schülerlösung in Abschnitt 4) denkbar (vgl. Neubert 2016, S. 113 f.).

3 Aufbau der Untersuchung

Gesamtüberblick

Innerhalb der Studie wurden dreißig Lernende, davon zwölf aus Jahrgangsstufe 2, zwölf aus Jahrgangsstufe 3 sowie sechs aus Jahrgangsstufe 4, untersucht. Die Lernenden wurden klassenweise in Gruppen von jeweils zwei Personen eingeteilt. Die Intention der Gruppenarbeit war, den Lernenden die Möglichkeit zu geben, die sehr komplexe Aufgabe durch gemeinsame Kommunikation und Zusammenarbeit zu lösen.

Die Durchführung sowie das Arbeitsmaterial waren in jeder Jahrgangsstufe identisch.

Um die Verknüpfung subjektiver Erfahrungen bezüglich des idealen Spielwürfels zu vermeiden, erfolgte keine Thematisierung zum Würfeln mit einem idealen Würfel, damit die Lernenden die Zufallsgeneratoren möglichst frei von Vorerfahrungen betrachten.

Die Studie bestand aus vier Teilen, die im Einzelnen anschließend beschrieben werden:

- Bekanntmachen mit den beiden Würfeln
- Einschätzen der Gewinnchancen
- Durchführen des Spiels
- Begründungen für den Spielausgang

Bekanntmachen mit den beiden Würfeln

Innerhalb der Einstiegsaufgabe vor Versuchsbeginn erhielten die Lernenden die zu betrachtenden Würfel als reales Material und wurden mit den ihnen vermutlich unbekannten Zufallsgeneratoren konfrontiert. Sie beschrieben innerhalb dieser Einstiegsaufgabe die beiden Würfel. Dadurch wurde gewährleistet, dass sich jeder Lernende über das äußere Erscheinungsbild, die unterschiedlichen Beschriftungen sowie die verschiedenen Anzahlen der einzelnen Augenzahlen bewusst war. Dieser Aspekt war für die Bearbeitung der weiteren Aufgaben von elementarer Bedeutung.

Nach dem Erfassen der Beschaffenheit der beiden Zufallsgeneratoren wurde den Lernenden das folgende Spiel erläutert (vgl. Pundsack & Schlie 2014, S. 18–22). Neben der mündlichen Erläuterung erhielten sie die Spielanleitung zusätzlich in gedruckter Form, um eventuelle Unklarheiten und Rückfragen zu vermeiden.

> „Würfelt mit beiden Würfeln gleichzeitig. Der Würfel, der die höhere Zahl zeigt, hat gewonnen. Wiederholt das Spiel 80-mal. Führt auf den Arbeitsblättern Nr. 2 und Nr. 3 eine Liste, in welche ihr eintragt, welcher Würfel gewinnt“ (Rausch 2019, S. 76).

Einschätzen der Gewinnchancen – Aufgabe 1

Zu Beginn der ersten Arbeitsphase schätzten die Lernenden die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Würfel ein. Im zweiten Teil der Aufgabe begründeten sie ihre Einschätzungen. Ihre Gedanken hielten sie dabei auf einem Arbeitsblatt fest.

Die Aufgaben waren wie folgt formuliert:

> „1. Was glaubt ihr, mit welchem Würfel gewinnt man häufiger?
>
> 2. Warum denkt ihr, ist das so?“ (ebd., S. 76).

Durch die Aufgabe sollte zunächst erfasst werden, wie viele Lernende die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Würfel vor dem Würfeln richtig einschätzen. Im Besonderen wurden hierbei jedoch die Begründungen der Lernenden betrachtet.

Durchführen des Spiels

Innerhalb der anschließenden Arbeitsphase überprüften sie ihre Vorstellungen anhand der Durchführung des Spiels. Die Lernenden trugen ihre Ergebnisse in vorgefertigte, nummerierte Tabellen ein.

> „Farbe des Würfels, der GEWONNEN hat“ (ebd. S. 77).

Die Anzahl der Gewinne wurde in die letzte Zeile auf dem Arbeitsblatt unter den Tabellen eingetragen.

> „Rot hat _____ Mal gewonnen.
>
> Gelb hat _____ Mal gewonnen“ (ebd., S. 77).

Die Ermittlung der Gewinne erfolgte durch Abzählen. Die häufige Durchführung des Experiments ist insbesondere bei asymmetrischen Zufallsgeneratoren von hoher Bedeutung, um konkrete Daten zu erfassen (vgl. Hasemann, Mirwald & Hoffmann 2012, S. 150).

Begründungen für den Spielausgang – Aufgabe 2

Nachdem die Lernenden beim Spiel herausgefunden hatten, dass der rote Würfel eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit besitzt, sollten sie versuchen, ihre Entdeckung zu begründen. Dazu bekamen sie ein weiteres Arbeitsblatt.

> „Versucht zu erklären:
>
> Warum gewinnt man mit dem _____ Würfel häufiger?“ (Rausch 2019, S. 78).

Die Aufgabe diente zur Erfassung der Art und Weise der Begründungen der Lernenden. Die Intention der Aufgabe war es, die vorliegenden Versuchsergebnisse zu verallgemeinern. Hierbei wurde den Lernenden kein Lösungsweg vorgeschrieben. Das Arbeitsblatt war bewusst nüchtern gestaltet, um mögliche Beeinflussungen durch äußere Gegebenheiten zu vermeiden. Auf dem Arbeitsblatt war lediglich ein weißer Rahmen, in den die Lernenden ihre Überlegungen notierten, vorzufinden.

4 Ergebnisse

Um die Begründungen der Lernenden einordnen zu können, wurden sechs Kategorien gebildet. Diese qualitativ aufsteigenden Kategorien bildeten sich folgendermaßen:

Kategorie 0: Keine Antwort.

Kategorie 1: Die Teilnehmenden äußern ihre Begründungen aufgrund von Vermutungen.

Kategorie 2: Die Begründungen werden lediglich anhand einer einfachen Beschreibung eines Würfels vorgenommen. Dabei werden die Augenzahlen des zweiten Würfels nicht erwähnt.

Kategorie 3: Unterschiedliche Gewinnwahrscheinlichkeiten werden mit den unterschiedlichen Augenzahlen der Würfel in Verbindung gebracht. Dabei werden die Augenzahlen der beiden Würfel in Beziehung zueinander betrachtet.

Kategorie 4: Die Begründungen werden anhand von theoretischen Überlegungen zum Würfeln mit einem idealen Würfel geäußert.

Kategorie 5: Darunter fallen Begründungen, die zeigen, dass der Lernende verschiedene mögliche Fälle der Variation der beiden Würfel erkennt. Die Augenzahlen der beiden Würfel werden in Beziehung zueinander gesetzt. Dabei erfolgt ein Anzahlvergleich der für einen Gewinn günstigen Ereignisse. Die günstigen Ereignisse werden nicht konkretisiert.

Kategorie 6: Darunter fallen Begründungen, die zeigen, dass der Lernende alle möglichen Fälle der Variation der beiden Würfel erkennt. Die für einen Gewinn zutreffenden Variationen der Anordnung werden konkretisiert und gegenübergestellt. Dabei wird sowohl ein Anzahlvergleich für günstige als auch ungünstige Ereignisse betrachtet.

Aufgabe 1

Jahrgangsstufe 2

Acht der zwölf Teilnehmenden der Jahrgangsstufe 2 schrieben dem gelben Würfel eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit zu. Sie begründeten ihre Wahl durch das Vorhandensein der Augenzahl Sechs auf dem Würfel. Dabei bezogen sie den roten Würfel nicht in ihre Argumentation mit ein. Die Argumentationen entsprachen Kategorie 2.

Zwei Lernende schätzten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit des roten Würfels korrekt ein. Jedoch begründete lediglich ein Teilnehmender seine Argumentation aufgrund theoretischer Überlegungen:

> *„Rot, weil da gibt's ja nur zwei Sechser und da kann man öfters die Zwei würfeln (...) [zeigt auf den roten Würfel] und hier immer nur Dreier" (ebd., S. 85).*

Der Lernende erkannte die ungleiche Verteilung der Augenzahlen auf dem gelben Würfel. Er nahm die höhere Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Augenzahl Zwei des gelben Würfels wahr. Dabei bezog er seine Argumentation ebenfalls auf das sichere Ereignis der Zahl Drei des roten Würfels.

Ein Teilnehmender entschied sich für die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit beider Würfel.

> *„Ich denke nicht so viel man die Sechs würfelt, sondern mehr die Zwei, weil da sind ja mehr Zweier (...) und wenn man mehr Zweier würfelt, hier sind ja nur Dreier, da besiegt die Drei die Zwei. Aber mit Gelb könnte man öfters die Sechser würfeln, also ist es Gleichstand" (ebd., S. 84)*

Der Lernende ging hierbei auf die unterschiedlichen Augenzahlen der beiden Würfel ein. Seine Aussage basierte bereits auf theoretischen Überlegungen. Er begründete richtig, dass die Wahrscheinlichkeit, mit dem gelben Würfel eine Sechs zu würfeln, geringer ist, als eine Zwei zu würfeln. Er setzte diese Erkenntnis in Bezug zu der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Ereignisse des roten Würfels. Im zweiten Teil seiner Aussage verlor er seinen zunächst richtigen Gedanken. Er argumentierte damit, dass es trotz der geringeren Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Ereignisses Sechs möglich wäre, die Sechs häufiger zu würfeln als die Zwei. Die Begründung ist Kategorie 3 zuzuordnen.

Ein weiterer Teilnehmender gab keine Antwort.

Jahrgangsstufe 3

Sieben von insgesamt zwölf Lernenden der dritten Jahrgangsstufe schätzten die Gewinnwahrscheinlichkeit des gelben Würfels höher ein. Die Argumentationen wiesen auf einen subjektiven Entscheidungsprozess aufgrund der Existenz der Augenzahl Sechs auf dem gelben Würfel hin. Alle Aussagen waren dabei sinngemäß wie folgt:

> *„Weil der gelbe Würfel zwei Sechsen drauf hat" (ebd., S. 91).*

Fünf von zwölf Teilnehmenden entschieden sich für den roten Würfel mit sinngemäßen Aussagen wie folgender:

> *„Weil bei dem roten Würfel nur Dreier drauf sind und bei dem gelben sind halt mehr Zweien" (ebd., S. 91).*

Alle fünf Lernenden, welche die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit des roten Würfels korrekt einschätzten, begründeten ihre Aussage richtig. Um ihre Aussage zu formulieren, zogen die Teilnehmenden zuvor die unterschiedliche Anzahl der Gewinnseiten des gelben Würfels in Betracht. Folglich ermöglichte ihnen der Vergleich der Anzahl der Gewinnseiten der jeweiligen Würfel ihre Begründung.

Jahrgangsstufe 4

Sechs von sechs Lernenden der Jahrgangsstufe 4 schätzten die Gewinnwahrscheinlichkeit beider Würfel als gleichwertig ein. Die Lernenden bezogen sich in ihren Begründungen besonders auf das Eintreten der Elementarereignisse beim Würfeln mit einem idealen Spielwürfel. Die Teilnehmenden begründeten ihre Aussagen alle sinngemäß durch Argumentationen wie folgende:

> *„Weil beim Würfeln alles möglich ist" (ebd., S. 93).*

Deutlich wurde eine Verinnerlichung der gleichen Auftrittswahrscheinlichkeit aller möglichen Ereignisse bei dem idealen Spielwürfel. Die Teilnehmenden ließen die Beschriftungen des roten und gelben Würfels innerhalb ihrer Argumentationen außer Acht.

Aufgabe 2

Jahrgangsstufe 2

Aufgabe 2 wurde von keinem Teilnehmenden der zweiten Jahrgangsstufe bearbeitet. Die Teilnehmenden konnten keine verallgemeinernde Begründung finden. Vermutlich war die Aufgabe des Verallgemeinerns zu anspruchsvoll für die Lernenden. Ihnen fehlte die Fähigkeit der Transformation von Informationen, um diese anschließend selektiv verwenden zu können.

Jahrgangsstufe 3

Acht von zwölf Teilnehmenden gelang es, die Aufgabe zu bearbeiten. Im Folgenden werden einige ausgewählte Schülerbeispiele vorgestellt.

Begründung 1:

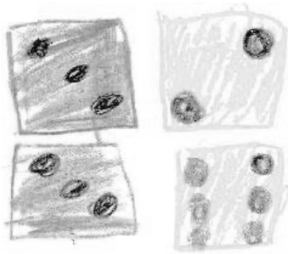

Abb. 4: Begründung 1 (Schülerbeispiel, Klasse 3)

Zur Begründung wurde hierbei eine ikonische Darstellung der Würfel gewählt. Die Lernenden stellten dabei ein günstiges Ereignis für den Gewinn des roten Würfels sowie ein günstiges Ereignis für den Gewinn des gelben Würfels dar. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten wurden mit den unterschiedlichen Augenzahlen der Würfel in Verbindung gebracht und die Augenzahlen der beiden Würfel wurden in Beziehung zueinander gesetzt.

Begründung 2:

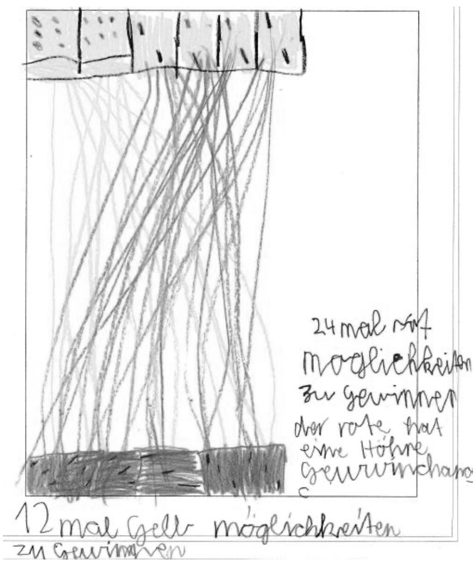

Abb. 5: Begründung 2 (Schülerbeispiel, Klasse 3)

Die Lernenden wendeten auf ikonischem Weg die Produktregel (kartesisches Produkt) an. Sie haben alle günstigen Ereignisse für den Gewinn des gelben Würfels mit einem gelben Stift und alle günstigen Ereignisse für den Gewinn des roten Würfels mit einem roten Stift verbunden. Durch Auszählen gelangen sie zu der korrekten Lösung.

Begründung 3:

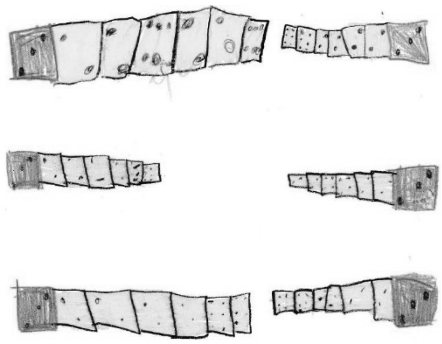

Abb. 6: Begründung 3 (Schülerbeispiel, Klasse 3)

Die Lernenden ermittelten alle möglichen Anordnungen der Zufallsgeneratoren. Die Augenzahlen der beiden Würfel wurden in Beziehung zueinander gesetzt. Dabei erfolgte ein Anzahlvergleich der für einen Gewinn günstigen Ereignisse. Die günstigen Ereignisse wurden hierbei nicht konkretisiert.

Begründung 4:

Abb. 7: Begründung 4 (Schülerbeispiel, Klasse 3)

Die Lernenden ermittelten alle möglichen Fälle der Variation der beiden Würfel. Die für einen Gewinn zutreffenden Variationen der Anordnung wurden konkretisiert und gegenübergestellt. Dabei wurde sowohl ein Anzahlvergleich für günstige als auch ungünstige Ereignisse betrachtet. Auf die Darstellung aller 36 verschiedenen Möglichkeiten auf ikonischer Weise wurde verzichtet. Dafür kommunizierten die Lernenden die noch fehlenden Möglichkeiten durch ihre Verschriftlichung. Durch das Auszählen der günstigen Fälle auf symbolischem Weg erhielten sie die korrekte Lösung.

Jahrgangsstufe 4:

Zwei Lernende der vierten Jahrgangsstufe begründeten mit folgender Darstellung:

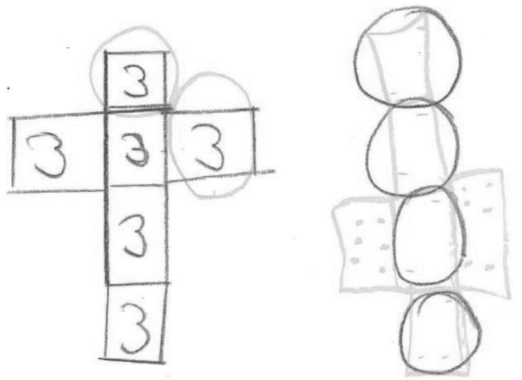

Abb. 8: Begründung Klasse 4 (Schülerbeispiel)

Die Lernenden stellten zunächst die Würfelnetze des roten sowie des gelben Würfels ikonisch dar. Anschließend zeichneten sie die jeweils günstigen Ereignisse für den Gewinn des anderen Würfels mittels eines Kreises in das jeweilige Netz ein. Die Augenzahlen der beiden Würfel wurden in Beziehung zueinander gesetzt. Dabei erfolgte ein Anzahlvergleich der für einen Gewinn günstigen Ereignisse. Die günstigen Ereignisse wurden dabei nicht konkretisiert.

5 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Die Ergebnisse unserer Untersuchung zeigen, dass es auch Grundschülern schon gelingt, sich mit komplexen Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit auseinanderzusetzen. Wie im Abschnitt zu den Ergebnissen der Studie ersichtlich, war bei beiden Aufgaben ein Sprung in der Kompetenzentwicklung von der zweiten zur dritten Klasse zu beobachten. Die Zweitklässler konnten Phänomene beschreiben, beim Formulieren von Begründungen zeigten sie noch deutliche Reserven. Auch wenn man auf Grund der geringen Population vorsichtig mit der Interpretation sein sollte, deckt sich unsere Erkenntnis mit Ergebnissen anderer Studien zu Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit.

Die Ergebnisse der ersten Aufgabe verdeutlichen, dass Drittklässler die unterschiedlichen Gewinnwahrscheinlichkeiten von zwei verschiedenen Zufallsgeneratoren schon recht gut einschätzen können. Die Lernenden der vierten Jahrgangsstufe erkannten dagegen die verschiedenen Gewinnwahrscheinlichkeiten nicht. Denkbar wäre ein Zusammenhang mit bereits fundierten, im Kontext des Würfelns mit einem idealen Würfel richtigen, Vorstellungen zur Gleichwahrscheinlichkeit des Eintretens aller möglichen Ereignisse.

Das Vorgehen auf empirisch-statistischem Weg ermöglichte den Lernenden der dritten und vierten Jahrgangsstufe bereits explizite Begründungen des Sachverhaltes. Sie begannen logische Operationen anhand des konkreten Sachverhalts durchzuführen. Informationen wurden von ihnen transformiert und anschließend selektiv verwendet. Die Lernenden zogen mehrere Aspekte der Situation zeitgleich in Betracht. Bereits vorhandene Informationen wurden in Bezug zueinander gesetzt und miteinander verglichen.

Allen Lernenden aller Jahrgangsstufen wurde durch das Handeln auf empirisch-statistischem Weg bewusst, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit des roten Würfels höher ist, als die Gewinnwahrscheinlichkeit des gelben Würfels. Einige Begründungen der Lernenden der zweiten Jahrgangsstufe sind bereits vor dem Würfeln korrekt, jedoch fehlt es den Lernenden vermutlich an mathematischen Modellen, um ihre Erkenntnisse zu verallgemeinern.

Die Begründungsqualitäten aller Lernenden veränderten sich nach der Durchführung des Spiels und dem damit verbundenen eigenständigen Handeln: Besonders in den Jahrgangsstufen 3 und 4 wurde eine Steigerung der Qualität der Begründungen ersichtlich. Die Lernenden dieser Jahrgangsstufen konnten ihre Gedanken auch bereits verschriftlichen. Sie wendeten Methoden an, die gewonnenen Erkenntnisse zu verallgemeinern. Im Vergleich begründeten die Lernenden der dritten Jahrgangsstufe teilweise bereits unter Einbezug aller möglichen Fälle der Variation der beiden Würfel. Darüber hinaus wurden die für einen Gewinn zutreffenden Variationen der Anordnung konkretisiert und gegenübergestellt. Dabei wurde sowohl ein Anzahlvergleich für günstige als auch ungünstige Ereignisse betrachtet.

Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass die Kompetenzen der Lernenden, Aufgaben mit verschiedenen Variablen zu lösen, mit zunehmendem Alter ansteigen. Während es den Lernenden der zweiten Jahrgangsstufe noch nicht gelingt, die Aufgabe erfolgreich zu bearbeiten, lösen und begründen die Lernenden der Jahrgangsstufe 3 hingegen die Aufgabe in hoher Qualität. Das Lösen und Begründen gelingt ebenfalls den Lernenden der vierten Jahrgangsstufe. Allerdings sind die Ergebnisse qualitativ nicht so hochwertig, wie sich vermuten ließe. Aufgrund der geringen Größe der Stichprobe können die Ergebnisse jedoch nicht auf die Gesamtheit schließen lassen.

Es zeigte sich, dass ein Vorgehen auf enaktiver Ebene nach Bruner den allgemeinen Kompetenzaufbau der Lernenden unterstützen kann (vgl. Zech 2002, S. 104). Ein Großteil der Begründungen verändert sich nach eigenständigem Handeln der Lernenden zum Positiven. Dabei wird deutlich, dass sich die Fähigkeit, die enaktive Ebene mit der ikonischen Ebene zu verknüpfen, mit ansteigendem Lebensalter steigert.

Zusammenfassend konnte mit der Studie gezeigt werden, dass Lernende der zweiten, dritten sowie vierten Jahrgangsstufe bereits über praktikable Denkstrukturen für die Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit verfügen und diese auch anhand komplexer Aufgaben anwenden können.

Literatur

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2007): Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. In: Reiss, K.; Scharlau, R.; Sonar, T.; Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Mathematik für das Lehramt.* Berlin [u. a.]: Springer. 2. überarb. und erw. Aufl.

Duden Paetec GmbH (2011): DUDEN. Formeln und Werte. Mathematik. Physik. Chemie. Biologie. Bis zum Abitur. Berlin/Mannheim: Duden Schulbuchverlag. 1. Aufl.

Gage, N. L., & Berliner, D. C. (1996): Pädagogische Psychologie. Weinheim [u. a.]: Psychologie-Verl.-Union. Beltz. 5. vollst. überarb. Aufl.

Hasemann, K., Mirwald, E., & Hoffmann, A. (2012): Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In: Walther, G.; van den Heuvel-Panhuizen, M.; Granzer, D.; Köller, O. (Hrsg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Aufgabenbeispiele. Unterrichtsanregungen. Fortbildungsideen. Mit CD-ROM.* In: Cwik, Gabriele; Metzger, Klaus (Hrsg.): *Lehrerbücherei Grundschule. Kompakt.* Humboldt-Universität zu Berlin. Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen. Berlin: Cornelsen. 6. Aufl., S. 141–161.

Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016): Einführung Mathematik Primarstufe – Geometrie. In: Padberg, F.; Büchter, A. (Hrsg.): *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* Berlin: Springer Spektrum.

Kütting, H., & Sauer, M. J. (2011): Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. In: Padberg, F. (Hrsg.): *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl. 3. stark erw. Aufl.

Lindenau, V., & Schindler, M. (1977): Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I. In: Lindenau, V.; Schindler, M. (Hrsg.): *Mathematik in der Unterrichtspraxis.* Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt. 1. Aufl.

Neubert, B. (2016): Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag. 2. Aufl.

Pundsack, F., & Schlie, S. (2014): Spielerisch zu den Pfadregeln. In: *Mathematik lehren.* H. 31. Seelze: Friedrich Verlag. S. 18–22.

Rausch, I. (2019): Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern der Klassen 2 bis 4 bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit – untersucht am Zufallsgenerator Würfel. Gießen: Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematik.

Zech, F. (2002): Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. Weinheim [u. a.]: Beltz-Pädagogik. Beltz. 10. unveränd. Aufl.

Anschrift der Verfasser

Ina Rausch
Vorstadt 18
36304 Alsfeld
ina.rausch2@web.de

Dr. Bernd Neubert
Lange Ortsstraße 35
35394 Gießen
neubertbernd@t-online.de